# 区間効率値と非効率値による評価 (不確実・不確定性のもとでの数理的決定理論)

数理解析研究所講究録
1132 巻 2000 年 150-153



# 区間効率値と非効率値による評価

円谷友英, 前田豊, 田中英夫
大阪府立大学工学部経営工学科

Abstract:
In this paper, we propose the evaluation by interval efficiencies. To rank the interval values we use one of the preference relations with which the nondominated DMUs are rated as efficient. The method for improving outputs with considering the lower limits of interval efficiencies is proposed.

## 1 はじめに

分析対象であるDMU(Decision Making Unit)に対して，もっとも有利な立場から評価を行う，包絡分析法（Data Envelopment Analysis: DEA)[1][2]は，多入力多出力システムにおける効率性の評価手法であり，効率値を各DMUに対してウェイト変数による仮想出力の仮想入力に対する比の相対的な最大値として定式化している．これに効率値の下界を付け加えて，効率値を区間値として求める方法が定式化されている．非効率値[3][4]についても，同様に下界を付け加えることによって，区間非効率値を求めることができる．区間効率値や区間非効率値を用いた評価を行う際，区間値の順序付けが必要となり，本研究では，区間値の選好関係を用いて順序付けを行う．また，区間効率値の下界を考慮した改善方法を提案する．

## 2 区間効率値と評価

効率値は相対的な評価の指標であるので，すべてのDMUに対する（仮想出力）/（仮想入力）の最大値を基準に，分析対象である$DMU_o$の（仮想出力）/（仮想入力）を効率値とみなし，その比を最大化する．区間効率値の上界を求めるモデルは，次のように定式化されている．

$$\left.\begin{array}{rll} \theta_o^{E*} = & \max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \dfrac{\dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}}{\max\limits_j \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{u} & \geq \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{v} & \geq \boldsymbol{0} \end{array}\right\} \tag{1}$$

ここで，$\boldsymbol{x}_j$と$\boldsymbol{y}_j$は，それぞれ$DMU_j$に対する入出力ベクトルである．ここから得られる最適解は，通常DEAで用いられている線形計画問題から得られる解と一致することが示されているので，区間効率値の上界はDEAの基本モデルであるCCR(Charnes Cooper Rhodes) モデル[1][2]から得られる．

区間効率値の下界についても同様の比を効率値とみなし，それを最小化する．区間効率値の下界を求めるモデルは，次のように定式化されている．

$$\left.\begin{array}{rll} \theta_{o*}^{E} = & \min\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \dfrac{\dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}}{\max\limits_j \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{u} & \geq \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{v} & \geq \boldsymbol{0} \end{array}\right\} \tag{2}$$

(2) 式の最適解は，次の問題と等しい．

$$\theta_{o*}^{E} = \min_{p,r} \frac{\dfrac{y_{op}}{x_{or}}}{\max\limits_j \dfrac{y_{jp}}{x_{jr}}} \tag{3}$$

これは，(2) 式の入力ウェイト$\boldsymbol{v}$について第$r$番目の要素が1，それ以外が0であり，出

カウェイト$\boldsymbol{u}$について，第$p$番目の要素が1，それ以外が0である場合となっている．この方法では，線形計画問題を解く必要はなく，最大化と最小化のみを行うことにより下界を求めることができる．

以上から求められた区間効率値は，$[\theta^E_{o*}, \theta^{E*}_o]$のように表すことができる．これを用いて評価するために，区間値の順序付けを行う．そのとき，区間値に対する1つの選好関係を用いて，区間値の大小を決める．[5][6]．ここで，2つの区間値$A=[\mathrm{a}_*, \mathrm{a}^*]$と$B=[\mathrm{b}_*, \mathrm{b}^*]$を仮定すると，区間値の半順序関係は以下のような選好関係により定義されている．[5][6]．

$$A < B \Leftrightarrow A \sqcap B = A$$

$$A < B \Leftrightarrow A \sqcup B = B$$

ただし，$\sqcap$と$\sqcup$の定義を以下に示す．

$$\begin{aligned}&[\mathrm{a}_*, \mathrm{a}^*] \sqcap [\mathrm{b}_*, \mathrm{b}^*] \\ &\quad = \{x \wedge y | x \in [\mathrm{a}_*, \mathrm{a}^*], y \in [\mathrm{b}_*, \mathrm{b}^*]\} \\ &[\mathrm{a}_*, \mathrm{a}^*] \sqcup [\mathrm{b}_*, \mathrm{b}^*] \\ &\quad = \{x \vee y | x \in [\mathrm{a}_*, \mathrm{a}^*], y \in [\mathrm{b}_*, \mathrm{b}^*]\}\end{aligned}$$

上の選考関係により定義された2つの半順序関係は同値であることが，容易に示される．

$DMU_k$と$DMU_l$に対して，
$[\theta^E_{k*}, \theta^{E*}_k] < [\theta^E_{l*}, \theta^{E*}_l]$
が成り立っているとき，$DMU_l$は$DMU_k$より効率的であると評価される．選好関係$\sqsubset$について，あるDMUに対して，その区間効率値より大きい区間効率値を持つDMUが存在しないとき，そのDMUは非劣であると呼ばれる．区間効率値を用いて評価するとき，非劣なDMUが効率的であると評価される．

## 3 下界を考慮した改善

$DMU_o$の効率値の改善として，入力を減らす方法と，出力を増やす方法，その両方を同時に行う方法の3種類が考えられるが，ここでは，出力を増やすという観点から改善を行う．区間効率値の上界を改善する方法として，すべての出力を$1/\theta^{E*}_o$倍するという方法が提案されており，この改善を行うと，改善後のDMUの区間効率値の上界は1となる．本研究では，区間効率値の上界が1未満となるDMUについて，区間効率値の下界を考慮した改善方法を提案する．この方法では，出力ごとに増加させる割合は異なる．

ここでは，簡単のため1入力2出力の例を用いて，その改善方法を示す．

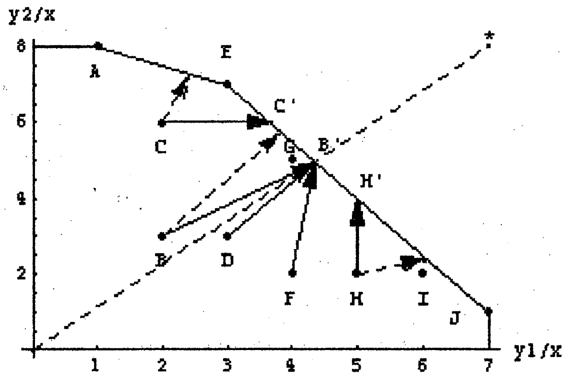


図 1: 1入力2出力の例

図1において，点線の矢印で，すべての出力を$1/\theta^{E*}_o$倍する改善を示し，実線の矢印で下界を考慮した改善を示している．B, D, Fの改善後の出力はすべて等しくなる（B'）．B'では，区間効率値の上界は効率的フロンティア上であることから1であり，下界は生産可能集合内で最大となっている．C, Gについて出力2/入力が，また，H, I, Jについて出力1/入力がB'より大きくなっている．そこで，C, Gについて出力2を，H, I, Jについて出力1を維持しままで，もう一方の出力の値を増加させ，区間効率値

の上界を1にするように改善する．下界は理想的な出力/入力との比較により求められる．図1では，1入力なので，すべてのDMUについて，理想的な出力/入力は出力1/入力=7，出力2/入力=8となり，∗で表されている．これと原点とを結ぶ直線上に存在するDMUは，出力1/入力による効率値と出力2/入力による効率値が等しくなる．よって，B'のとき，上界は1となり，下界が最大となる．

多入力多出力についての出力の改善方法は同様の観点から一般化できると考えられる．$DMU_o$についての理想的なDMUの第$p$番目の出力は，次のように表される．

$$y_{op}{}^{*} = \max_{r}\left\{\left(\max_{j}\frac{y_{jp}}{x_{jr}}\right)x_{or}\right\}$$

$DMU_o$の第$r$番目の入力について，すべてのDMUの出力/入力の最大値から，その入力に対する最大の出力を求め，すべての入力から考えられる出力のうち最大値が理想的な第$p$番目の出力値となる．この理想的なDMUは，次式で与えられる既存のDMUから作られている生産可能集合の内側には存在しない．

$$P = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\boldsymbol{x} \geq X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \leq Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}\} \quad (4)$$

これは，データ空間上で，入力がより大きくて出力がより小さいDMUは生産可能となることを表している．そこで，$\boldsymbol{y}_o{}^*$をいくらか縮小し，生産可能集合内に存在し，かつ最大となる出力を求め，それを，$\boldsymbol{y}_o{}^{pos}$で表す．このような出力について，区間効率値の上界は必ず1となる．もし，すべての$p$について$y_{op}{}^{pos} \geq y_{op}$ならば，$\boldsymbol{y}_o{}^{new} = \boldsymbol{y}_o{}^{pos}$とし，ある$p$について$y_{op}{}^{pos} < y_{op}$ならば，その$p$については出力は変化させず，その他の$p$について，$\boldsymbol{y}_o{}^{pos}$に近づくように改善する．

# 4 数値例

図1に示す例を用いて，区間効率値を求めた．それを，図2の実線に示した．図2の波線は下界を考慮して改善を行ったときの区間効率値である．改善前と改善後の出力値を表1に示した．区間値の選好関係を用いて，得られた区間効率値を順序づけし，図3に示した．

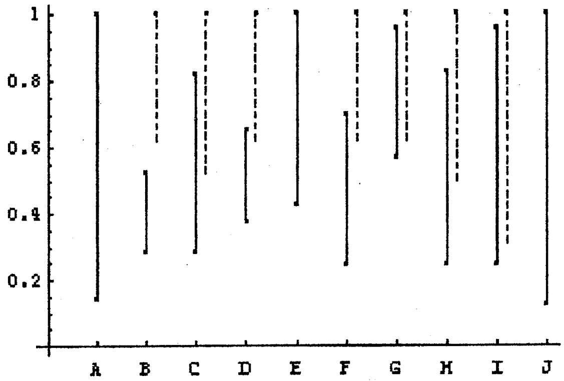


図 2: 改善前と改善後の区間効率値

| DMU | $y_1$ | $y_2$ | $y_1{}^{new}$ | $y_2{}^{new}$ |
|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 8 | 1 | 8 |
| B | 2 | 3 | 4.35 | 4.97 |
| C | 2 | 6 | 3.67 | 6 |
| D | 3 | 3 | 4.35 | 4.97 |
| E | 3 | 7 | 3 | 7 |
| F | 4 | 2 | 4.35 | 4.97 |
| G | 4 | 5 | 4.33 | 5 |
| H | 5 | 2 | 5 | 4 |
| I | 6 | 2 | 6 | 2.5 |
| J | 7 | 1 | 7 | 1 |

表 1: 改善前と改善後の出力値

図3より，改善前はEとGが非劣なDMUとなっており，これらが効率的であると評価される．区間値の半順序関係を用いて，評価することで，上界が1ではないが，デー

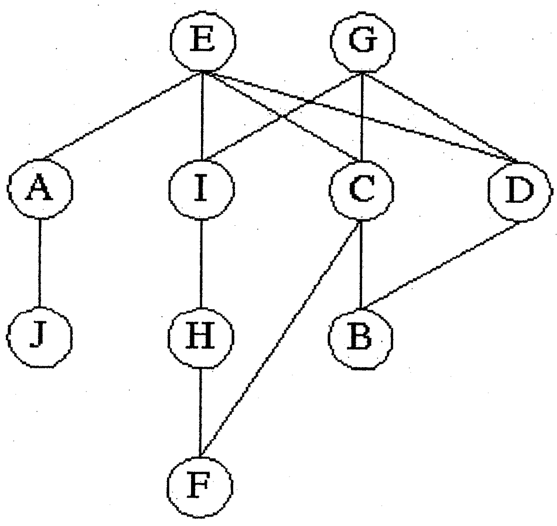


図 3: 改善前の順序

タに偏りの少ないGを効率的であると判断でき，また，上界が1であっても，データに偏りのあるA,Jは，効率的であるとは判断されなくなる．

## 5 おわりに

本研究では，効率値の上界と下界との求め方の定式化を行い，区間効率値を求めた．得られた区間効率値から，区間値の選好関係を用いて，区間値を順序付けを行い，区間効率値による評価を行った．そして，区間効率値の下界は，どれか1つが優れたDMUとの比較から得られる値であるという点に着目し，上界が1ではないDMUについて，下界を考慮した出力の改善方法を提案した．

## 参考文献

[1] A.Charnes, W.W.Cooper and E.Rhodes, "Measuring the Efficiency of Decision Making Unit", *European Journal of Operational Research*, 1978, 429-444

[2] 刀根薫, "経営効率性の測定と改善-包絡分析法DEAによる-", 日科技連, 1993

[3] 山田善靖, 松井知己, 杉山学, "DEAモデルに基づく新たな経営効率性分析法の提案", 日本オペレーションズ・リサーチ学会論文誌 37, 1994, 158-167

[4] 山田善靖, 末吉俊幸, 杉山学, 牧野智謙, "日本的経営の為のDEA法-日本経済に果たす公共事業投資の役割-", 日本オペレーションズ・リサーチ学会論文誌 38, 1995, 381-397

[5] D.Dubious, H.Prade, "Fuzzy sets and systems-Theory and Applications", Academic Press, 1980

[6] L.A.Zadeh, "Fuzzy sets", *Information and Control*, 1965, 338-353